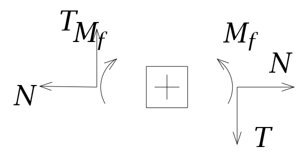
Azioni interne in sistemi articolati

- Considereremo soltanto sistemi di aste piani.
  Tagliando un'asta in un suo punto P la si divide in due parti; si chiamano *azioni interne* le azioni esercitate da una parte dell'asta sull'altra. Esse sono: l'azione assiale N, l'azione di taglio T e il momento flettente M_f.

- Le convenzioni di segno vengono indicate con un simbolo del tipo:



Sul lato destro le frecce indicano le convenzioni di segno per le azioni esercitate dalla parte di destra dell'asta, mentre sul lato sinistro sono indicate le azioni esercitate dalla parte di sinistra. Nell'esempio considerato si sono assunte come positive: l'azione assiale N a trazione (la parte di destra "tira" quella di sinistra e viceversa), l'azione di taglio oraria e il momento flettente M_f che tende le fibre inferiori.

- Nella pratica, se conosciamo le reazioni vincolari in un estremo dell'asta, allora per determinare le azioni interne basta imporre che la porzione di asta tagliata è in equilibrio con le forze di reazione del vincolo, le forze esterne che competono alla porzione di asta considerata e le azioni interne N, T e M_f esercitate dall'altra porzione di asta applicate nel punto in cui questa è stata tagliata.

- Le azioni interne negli estremi sono le reazioni vincolari.

- Nel caso particolare di un'asta rettilinea incernierata agli estremi, per calcolare T e M_f non serve conoscere le reazioni vincolari. Infatti le due equazioni del momento per i due estremi A e B forniscono due equazioni nelle due incognite T e M_f.

- In corrispondenza di una forza concentrata assiale si ha una discontinuità nell'azione assiale N.
  In corrispondenza di una forza concentrata di taglio si ha una discontinuità nell'azione di taglio T.
  In corrispondenza di un momento applicato in un punto dell'asta si ha una discontinuità nel momento flettente M_f.

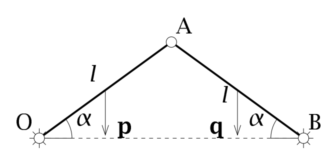
- In un'asta rettilinea valgono le seguenti relazioni:

$$\left|\frac{\partial M_f}{\partial x}\right| = |T|, \quad \left|\frac{\partial T}{\partial x}\right| = |F_N|, \quad \left|\frac{\partial N}{\partial x}\right| = |F_T|$$

  Dove F_N e F_T sono rispettivamente la componente normale e assiale della forza specifica distribuita lungo l'asta.

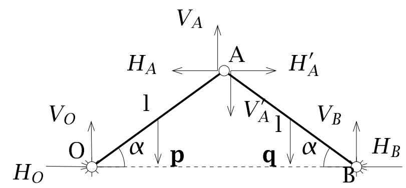
Problema arco a 3 cerniere

Determinare le azioni interne nel sistema di figura.



Soluzione:

Denotiamo con H e V le reazioni esercitate *dalle* cerniere *sulle* aste. H_O, V_O, H_B e V_B sono *esterne* al sistema, H_A, V_A, H'_A e V'_A sono *interne* al sistema.
Scriviamo le equazioni di equilibrio del sistema:



$$R_y = 0: \qquad V_O + V_B = p + q$$

$$R_x = 0: \qquad H_O - H_B = 0$$

$$M_{(B)} = 0: \quad q\frac{l}{2}\cos\alpha + 3p\frac{l}{2}\cos\alpha - V_O 2l\cos\alpha = 0$$

$$V_O = \frac{3p+q}{4} \qquad V_B = \frac{p+3q}{4}$$

Spezziamo il sistema e scriviamo l'equazione del momento per la sola asta OA:

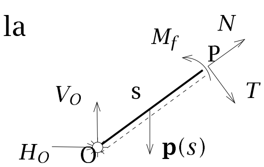
$$M_{(A)}^{\text{asta}OA} = p\frac{l}{2}\cos\alpha - V_O l\cos\alpha + H_O l\sin\alpha = 0$$

Ricaviamo:

$$H_O = (V_O - \frac{p}{2})\text{cotg}\alpha \qquad H_B = \frac{p+q}{4}\text{cotg}\alpha$$

$$R_y^{\text{asta}OA} = 0: \quad V_A = p - V_O = \frac{p-q}{4}$$

Scriviamo infine le equazioni di equilibrio per la cerniera A:



$$V'_A - V_A = 0, \qquad H'_A - H_A = 0$$

$$V'_A = \frac{p-q}{4} \quad H'_A = \frac{p+q}{4}\text{cotg}\alpha$$

Calcolo delle azioni interne.
Scriviamo le equazioni di equilibrio per il tratto di asta OP di lunghezza s:

$$R_N^{\text{asta}OA} = 0: \qquad N + H_O\cos\alpha + V_O\sin\alpha - p(s)\sin\alpha = 0$$

$$R_T^{\text{asta}OA} = 0: \qquad T + H_O\sin\alpha - V_O\cos\alpha + p(s)\cos\alpha = 0$$

$$M_{(P)}^{\text{asta}OA} = 0: \qquad M_f + p(s)\frac{s}{2}\cos\alpha + H_O s\sin\alpha - V_O s\cos\alpha = 0$$

Otteniamo:

$$N = \frac{ps}{l}\sin\alpha - \frac{p+q}{4}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{3p+q}{4}\sin\alpha$$

$$T = -\frac{ps}{l}\cos\alpha - \frac{p+q}{4}\cos\alpha + \frac{3p+q}{4}\cos\alpha = p\cos\alpha(\frac{1}{2} - \frac{s}{l})$$

$$M_f = -\frac{ps^2}{2l}\cos\alpha - \frac{p+q}{4}s\cos\alpha + \frac{3p+q}{4}s\cos\alpha = p\cos\alpha(-\frac{s^2}{2l} + \frac{s}{2})$$

Si verifica che $|\partial M_f/\partial s| = |T|$ e che agli estremi $M_f = 0$.

Altro metodo per determinare T e M_f :

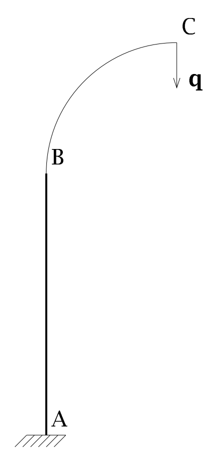
$$M_{(A)}^{AP} = 0 : \qquad M_f + T(l-s) - p(s)(l-s)^2\cos\alpha/(2l) = 0$$

$$M_{(O)}^{OP} = 0 : \qquad M_f - Ts - p(s)s^2\cos\alpha/(2l) = 0$$

Otteniamo cosí due equazioni in due incognite per M_f e T.

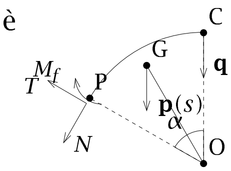
Problema

Calcolare gli sforzi interni al sistema di figura (lampione) di peso specifico **p**, *che sopporta nell'estremo libero un carico* **q**.



Soluzione:

Consideriamo dapprima il tratto curvo. La lunghezza OG (G è il baricentro del tratto di asta curva CP) è data da:



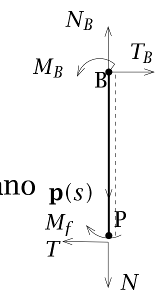
$$OG = \frac{\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} R^2 \cos\theta d\theta}{R\alpha} = \frac{2R\sin(\alpha/2)}{\alpha}$$

$$R_N = 0: \qquad N + p(s)\sin\alpha + q\sin\alpha = 0$$

$$R_T = 0: \qquad T - p(s)\cos\alpha - q\cos\alpha = 0$$

$$M_{(O)} = 0: \qquad -M_f + p(s)OG\sin\frac{\alpha}{2} + NR = 0$$

Otteniamo:



$$(1) \quad N = -(pR\alpha + q)\sin\alpha, \quad T = (pR\alpha + q)\cos\alpha$$

$$(2) \quad M_f = pR^2(-\alpha\sin\alpha + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}) - qR\sin\alpha$$

Consideriamo ora il tratto di asta dritta: I valori di T_B, N_B e M_{fB} si ricavano dalle (1) e (2) sostituendo α con $\pi/2$:

$$N_B = -(pR\pi/2 + q), \quad T_B = 0$$

$$M_{fB} = pR^2(-\pi/2 + 1) - qR$$

Equazioni di equilibrio del tratto di asta BP :

$$R_y = 0: \qquad N = N_B - p(s) = -(pR\pi/2 + q) - sp$$

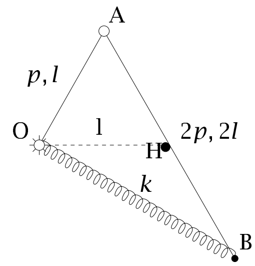
$$R_x = 0: \qquad T = T_B = 0$$

$$M_{(P)} = 0: \qquad M_f = M_{fB} - \overline{BP}T_B = pR^2(1 - \pi/2) - qR$$

In particolare le reazioni vincolari in A si ottengono sostituendo P con A in queste relazioni:

$$T_A = 0, \quad N_A, M_{fA} \neq 0$$

Problema T.E. statica 4.9.92

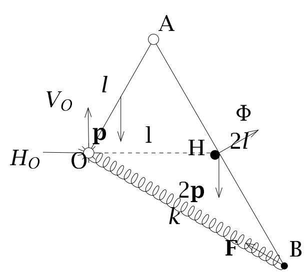


Il sistema di figura, costituito dalle aste OA, di peso p e lunghezza l, e AB, di peso $2p$ e lunghezza $2l$, collegate a cerniera in A, è posto in un piano verticale. L'estremo O è fissato a cerniera e l'asta AB si poggia ad un piolo H, posto sull'orizzontale per O a distanza l da questo. i punti B e O sono collegati da una molla di costante elastica k.

Supposti lisci tutti i vincoli, si determini il valore di k necessario affinché all'equilibrio l'asta OA formi un angolo di $\pi/3$ sull'orizzontale e, in tale condizione, calcolare le azioni interne di AB.

Soluzione:

1. Equilibrio del sistema:



$$R_y = 0: \qquad 3p - V_O - \Phi \sin \pi/6 - F \sin \pi/6 = 0$$

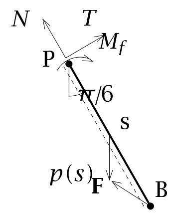
$$R_x = 0: \qquad H_O + \Phi \cos \pi/6 - F \cos \pi/6 = 0$$

$$M_{(O)}: \qquad p\frac{l}{2} \cos \pi/3 - l\Phi \cos \pi/3 + l2p = 0 \quad \Rightarrow \Phi = \frac{9p}{2}$$

Equilibrio dell'asta AB :

$$M_{(A)}^{AB} = 0: \qquad l2p \cos \pi/3 - \Phi l + F2l \sin \pi/6 = 0 \Rightarrow F = \frac{7}{2}p$$

Ma $F = k\overline{OB}$, e $\overline{OB} = 2l \cos \pi/6$; pertanto $k = 7p/(2\overline{OB}) = 7p/(2l\sqrt{3})$



2. Nel tratto di asta BP, prima di aver raggiunto H $(s \leq l)$:

$$R_N = 0: \qquad N + F\cos\pi/6 - p(s)\cos\pi/6 = 0$$

$$R_T = 0: \qquad T - p(s)\sin\pi/6 - F\sin\pi/6 = 0$$

$$M_{(P)} = 0: \qquad M_f + p(s)\frac{s}{2}\sin\pi/6 + Fs\sin\pi/6 = 0$$

Otteniamo:

$$N = (\frac{ps}{l} - \frac{7p}{2})\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad T = \frac{ps}{2l} + \frac{7p}{4}, \quad M_f = -\frac{ps^2}{4l} - \frac{7ps}{4}$$

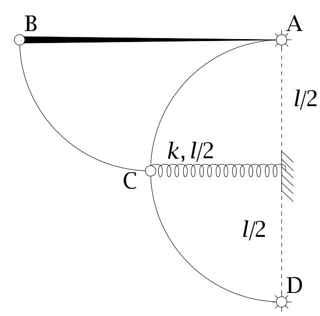
Nel tratto dopo H $(s > l)$: N resta uguale,

$$T = \frac{ps}{2l} + \frac{7p}{4} - \frac{9p}{2} = \frac{ps}{2l} - \frac{11p}{4}$$

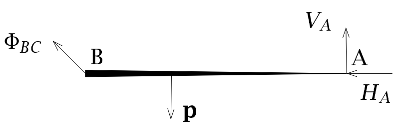
$$M_f = -\frac{ps^2}{4l} - \frac{7ps}{4} + (s-l)\frac{9p}{2} = -\frac{ps^2}{4l} + \frac{11ps}{4} - \frac{9pl}{2}$$

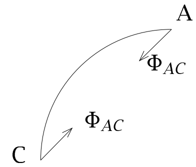
Problema N13 p.126

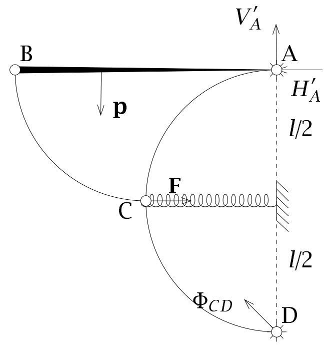
Calcolare gli sforzi nell'asta AB di figura, soggetta ad un carico distribuito con legge triangolare (e precisamente nel punto distante x da A il peso specifico è $\rho = hx$, con h costante positiva assegnata). Determinare poi le azioni che le tre aste curvilinee (quadranti di circonferenze scariche) esercitano sul nodo C.



Soluzione:







Determiniamo le reazioni vincolari negli estremi. Chiamiamo H'_A e V'_A le reazioni vincolari esterne in A; Φ_{CD} è la reazione vincolare esterna in D. H_A e V_A sono le reazioni vincolari sull'asta AB in A.
Equilibrio dell'asta AB :

$$M^{AB}_{(B)} = 0 : \qquad V_A = hl^2/6$$

Equilibrio del sistema:

$$M^{\text{sistema}}_{(B)} = 0 : \qquad V'_A l - \frac{hl^2}{6} l + k\frac{l}{2}\frac{l}{2} = 0$$

Equilibrio al nodo A: $V'_A - V_A + \Phi_{AC}\sqrt{2}/2 = 0$, $H'_A - H_A - \Phi_{AC}\sqrt{2}/2 = 0$.
Ricaviamo: $\Phi_{AC} = kl\sqrt{2}/4$.

$$R^{\text{sistema}}_y = 0 : \qquad \frac{hl^2}{2} - \Phi_{CD}\frac{\sqrt{2}}{2} - V'_A = 0$$

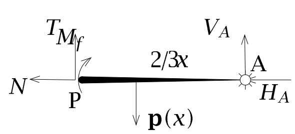
$$R^{\text{sistema}}_x = 0 : \qquad H'_A - \frac{kl}{2} + \Phi_{CD}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\text{Ricaviamo :} \quad H_A = -\frac{hl^3}{3}, \quad \Phi_{CD} = (\frac{kl}{4} + \frac{hl^2}{3})\sqrt{2}$$

Calcolo di Φ_{BC}:

$$M^{AB}_{(A)} = 0 : \qquad \frac{2}{3}l\frac{hl^2}{2} - \Phi_{BC} l\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \ \Rightarrow \Phi_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{3}hl^2$$

Azioni interne nell'asta AB.

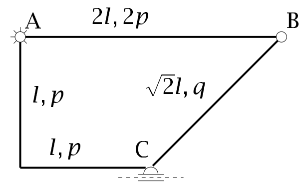


$$N = -H_A \quad T = \frac{hx^2}{2} - V_A = \frac{hx^2}{2} - \frac{hl^2}{6}$$

$$M_{(P)} = 0 : \quad M_f + \frac{1}{3}x\frac{hx^2}{2} - V_A x = 0 \ \Rightarrow M_f = -\frac{hx^3}{6} + \frac{hl^2}{6}x$$

Problema T.E. statica 22.7.93

Nella struttura di figura l'asta AC ha le due ali di peso p e lunghezza l, l'asta AB ha lunghezza $2l$ e peso $2p$ e l'asta BC, di lunghezza $\sqrt{2}l$, ha peso q. Determinare le azioni interne nell'asta AC.



Soluzione:

Calcoliamo la reazione V_C esercitata dal carrello sul sistema.
Scriviamo l'equazione del momento del sistema rispetto ad A:

$$M_{(A)} = 0: \qquad 2pl + q(l + \frac{l}{2}) + \frac{l}{2}p = V_C l$$

$$V_C = \frac{5}{2}p + \frac{3}{2}q$$

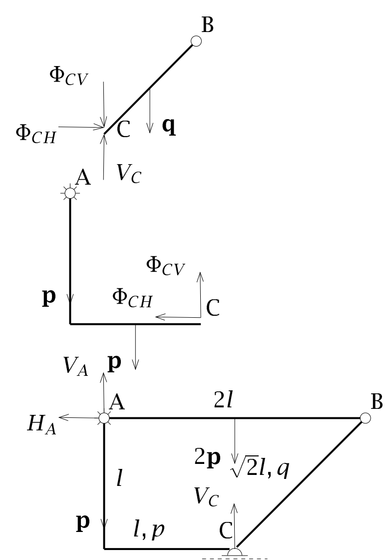
Calcoliamo ora la reazione vincolare esercitata sull'asta AC in C. Indichiamo con Φ_{CH}, Φ_{CV} la reazione della cerniera sull'asta.

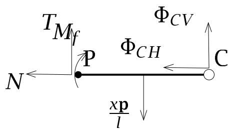
$$M_{(A)}^{AC} = 0: \qquad \frac{lp}{2} - \Phi_{CV}l + \Phi_{CH}l = 0$$

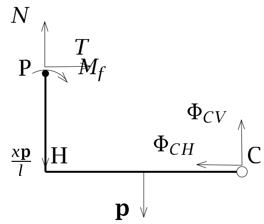
$$M_{(B)}^{BC} = 0: \qquad \frac{ql}{2} + \Phi_{CV}l + \Phi_{CH}l - V_C l = 0$$

Otteniamo:

$$\Phi_{CH} = \frac{q}{2} + p, \quad \Phi_{CV} = \frac{q}{2} + \frac{3}{2}p$$







Calcoliamo ora le azioni interne nell'asta AC.
Nel tratto orizzontale:

$$N + \Phi_{CH} = 0 \Rightarrow N = -\frac{q}{2} - p$$

$$T + \Phi_{CV} - p(x) = 0 \Rightarrow T = \frac{px}{l} - \frac{q}{2} - \frac{3p}{2}$$

$$M_f + p(x)\frac{x}{2} - \Phi_{CV}x = 0 \Rightarrow M_f = (\frac{q}{2} + \frac{3p}{2})x - \frac{px^2}{2l}$$

Nel tratto verticale:

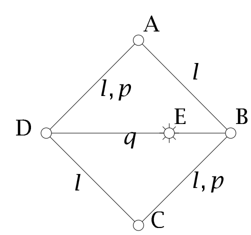
$$N - p(x) + \Phi_{CV} - p = 0 \Rightarrow N = \frac{px}{l} - \frac{q}{2} - \frac{p}{2}$$

$$T - \Phi_{CH} = 0 \Rightarrow T = \frac{q}{2} + p$$

$$M_f + p\frac{l}{2} + \Phi_{CH}x - \Phi_{CV}l = 0 \Rightarrow M_f = (\frac{q}{2} + p)(l - x)$$

Problema T.E. statica 14.4.92

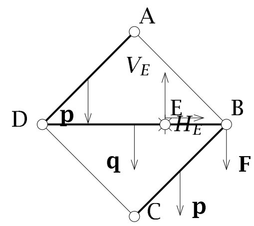
In un piano verticale, 4 aste di ugual lunghezza l sono incernierate fra loro negli estremi $ABCD$ ed atteggiate secondo un quadrato per azione di una quinta asta diagonale DB di lunghezza $l\sqrt{2}$. Le aste AB e CD sono di peso trascurabile; quelle BC e DA sono omogenee di ugual peso p. L'asta BD, omogenea di peso q, è incernierata ad un punto fisso E, a distanza $3l\sqrt{2}/4$ da D. Determinare la forza verticale **F** *che bisogna applicare in B affinché il sistema si mantenga in equilibrio con DB orizzontale e gli sforzi interni nell'asta DB.*



Soluzione:

1. Calcolo della forza da applicare F.

Equilibrio del sistema:



$$M_{(E)} = 0: \qquad \frac{1}{4}l\sqrt{2}F - \frac{1}{4}l\sqrt{2}q - \frac{1}{2}l\sqrt{2}p = 0 \Rightarrow F = 2p + q$$

2. Azioni interne.

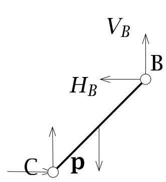
Calcolo le reazioni vincolari in E:

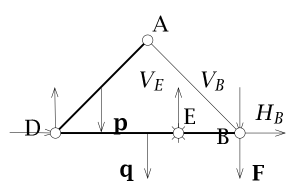
$$R_x = 0: \qquad H_E = 0$$

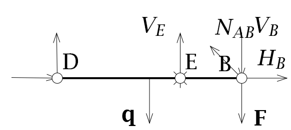
$$R_y = 0: \qquad V_E = F + 2p + q = 4p + 2q$$

Indichiamo con H_B, V_B le reazioni vincolari esercitate sull'asta CB in B.

$$M^{CB}_{(C)} = 0: \qquad p\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{2} - V_B\frac{\sqrt{2}}{2}l - H_B\frac{\sqrt{2}}{2}l = 0 \Rightarrow H_B + V_B - p/2 = 0$$







$$M^{DABE}_{(D)} = 0: \qquad p\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{2} + q\frac{\sqrt{2}}{2}l - V_E\frac{3}{4}l\sqrt{2} + V_Bl\sqrt{2} + Fl\sqrt{2} = 0$$

$$\frac{p}{4} + \frac{q}{2} - \frac{3}{4}V_E + V_B + F = 0$$

$$V_B = \frac{3}{4}V_E - \frac{p}{4} - \frac{q}{2} - F = \frac{3p}{4}, \quad H_B = -\frac{p}{4}$$

Consideriamo l'asta DB:

$$M^{DB}_{(D)} = 0: \qquad q\frac{\sqrt{2}}{2}l - V_E\frac{3\sqrt{2}}{4}l - N_{AB}\frac{\sqrt{2}}{2}l\sqrt{2} + F\sqrt{2}l + V_B\sqrt{2}l = 0$$

$$\frac{q}{2} - \frac{3}{4}V_E - \frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} + F + V_B = 0$$

Sostituendo F e V_B :

$$N_{AB} = -\frac{\sqrt{2}p}{4}$$

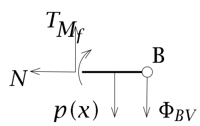
La componente verticale dell'azione esercitata sull'asta DB in B è:

$$\Phi_{BV} = F + V_B - N_{AB}\frac{\sqrt{2}}{2} = 3p + q$$

Quella orizzontale:

$$\Phi_{BH} = H_B - N_{AB}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Nel tratto BP, con $\overline{BP} \leq \overline{BE}$:

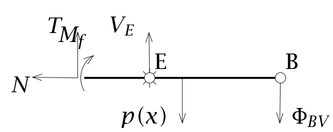


$$N = 0, \quad T - \Phi_{BV} - \frac{qx}{\sqrt{2}l} = 0 \Rightarrow T = 3p + q + \frac{qx}{\sqrt{2}l}$$

$$M_f + \frac{qx}{\sqrt{2}l}\frac{x}{2} + \Phi_{BV}x = 0 \Rightarrow M_f = -\frac{qx^2}{2\sqrt{2}l} - (3p+q)x$$

Nel tratto BP, con $\overline{BP} > \overline{BE}$:

$$N = 0, \quad T = \Phi_{BV} + \frac{qx}{\sqrt{2}l} - V_E = -p - q + \frac{qx}{\sqrt{2}l}$$

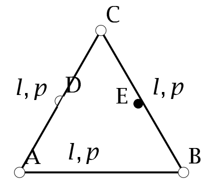


$$M_f - (x - \frac{l\sqrt{2}}{4})V_E + \frac{qx^2}{2\sqrt{2}l} + \Phi_{BV}x = 0$$

$$M_f = (x - \frac{l\sqrt{2}}{4})(4p + 2q) - \frac{qx^2}{2\sqrt{2}l} - (3p+q)x$$

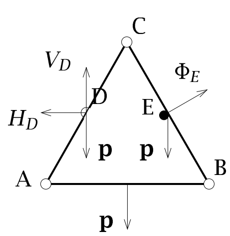
Problema T.E. statica 1.7.92

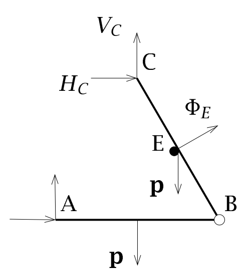
Il sistema articolato di figura è costituito da tre aste omogenee di uguale lunghezza l e peso p, collegate a cerniera negli estremi A, B, C. Esso è posto in un piano verticale, con AB orizzontale; l'asta AC è incernierata nel punto medio D, l'asta BC appoggia nel punto medio E su un piolo liscio.
Calcolare le azioni interne nell'asta BC.

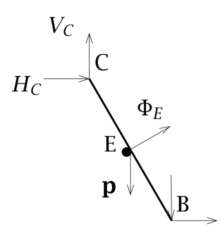


Soluzione:

Calcolo della reazione vincolare esterna Φ_E:







$$M_{(D)}^{\text{sistema}} = 0: \qquad \frac{1}{4}pl + \frac{1}{2}pl - \Phi_E\frac{l}{2}\sin\pi/6 = 0$$

$$\Phi_E = 3p$$

$$M_{(A)}^{ABC} = 0: \qquad p\frac{l}{2} - V_C\frac{l}{2} + H_C\frac{l\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}lp = 0$$

$$(1) \quad p - V_C + \sqrt{3}H_C + \frac{3}{2}p = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}p - V_C + \sqrt{3}H_C = 0$$

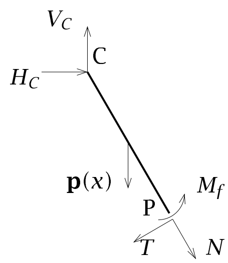
$$M_{(B)}^{BC} = 0: \qquad \frac{1}{2}p\frac{l}{2} - V_C\frac{l}{2} - H_C\frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}l\Phi_E = 0$$

$$(2) \quad V_C + H_C\sqrt{3} - \frac{p}{2} + 3p = 0$$

Da (1) e (2) ricaviamo:

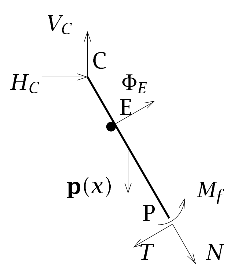
$$H_C = -\frac{5p}{2\sqrt{3}}, \quad V_C = 0$$

Calcoliamo le azioni interne nell'asta BC; tagliamo l'asta nel punto P, con $\overline{CP} = x, x < \overline{CE}$:



$$N - V_C \cos\pi/6 + H_C \sin\pi/6 + \frac{p}{l}x\cos\pi/6 = 0 \Rightarrow N = \frac{5}{4\sqrt{3}}p - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{px}{l}$$

$$T - H_C \cos\pi/6 - V_C \sin\pi/6 + \frac{p}{l}x\sin\pi/6 = 0 \Rightarrow T = \frac{5}{4}p + \frac{px}{2l}$$



$$M_f - H_C x\cos\pi/6 + \frac{p}{l}x\frac{x}{2}\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow M_f = -\frac{px^2}{4l} - \frac{5}{4}px$$

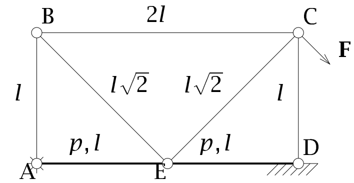
Tagliamo ora l'asta nel punto P, con $\overline{CP} = x, x \geq \overline{CE}$: N resta invariato,

$$T - H_C \cos\pi/6 - V_C \sin\pi/6 + \frac{p}{l}x\sin\pi/6 - \Phi_E = 0 \Rightarrow T = \frac{17}{4}p + \frac{px}{2l}$$

$$M_f - H_C x\cos\pi/6 + \frac{p}{l}x\frac{x}{2}\frac{1}{2} - \Phi_E(x - l/2) = 0 \Rightarrow M_f = -\frac{px^2}{4l} + \frac{7}{4}px - \frac{3pl}{2}$$

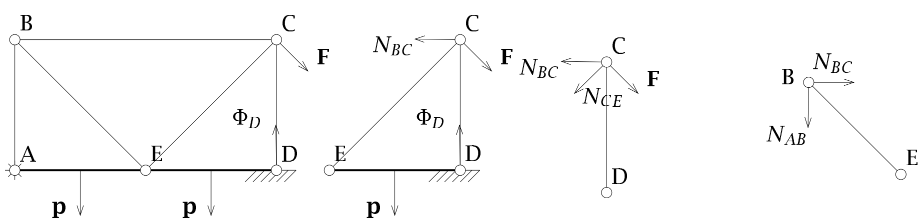
Problema BMA-II 6.7 p.85

Nella struttura rappresentata in figura, le aste omogenee AE ed ED hanno lunghezza l e peso p, le aste rimanenti hanno peso trascurabile. Una forza, di modulo F ed inclinata di $\pi/4$ rispetto all'orizzontale, è applicata in C.
Si determinino le azioni assiali nelle aste di peso trascurabile.



Soluzione:

Traccia della soluzione.



$$M_{(A)}^{\text{sistema}} = 0 :\Rightarrow \Phi_D$$

$$M_{(E)}^{ECD} = 0 :\Rightarrow N_{BC}$$

$$M_{(D)}^{CD} = 0 :\Rightarrow N_{CE}$$

$$R_y^C = 0 :\Rightarrow N_{CD}$$

$$M_{(E)}^{EB} = 0 :\Rightarrow N_{AB}$$

$$R_y^B = 0 :\Rightarrow N_{BE}$$